CENTRE
DE
VANVES

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

CENTRE NATIONAL D'ENSEIGNEMENT A DISTANCE

AGREGATION DE MATHEMATIQUES -407- A.2075.D.01

PROFESSEUR : M. C. SERVIEN Devoir 1 - Série 1

COMPOSITION D'ANALYSE 1980

DURÉE : 6 heures

NOTATIONS ET RAPPELS

On note $\mathbb{R}$ le corps des réels, $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls, $\mathbb{C}$ le corps des complexes.

On rappelle qu'un espace de Banach complexe est un espace vectoriel complexe normé complet pour sa norme. Si E est un espace de Banach complexe et $\|\cdot\|$ sa norme, on appelle *opérateur* de E toute application linéaire continue T de E dans E et norme de l'opérateur T le nombre

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\|.$$

Définition. Un opérateur T de E est dit *projecteur contractant* s'il a les deux propriétés suivantes :

$$a. \quad T^2 = T$$

$$b. \quad \|T\| \leq 1.$$

L'objet du problème est l'étude des projecteurs contractants de certains espaces de Banach complexes.

Les parties I, II, III *du problème sont indépendantes (sauf en ce qui concerne les notations).*

N.B. — *On rappelle que le soin apporté à la rédaction est un élément important d'appréciation. Par exemple, les passages à la limite dans les intégrales devront être soigneusement justifiés.*

PREMIÈRE PARTIE

Si un espace vectoriel complexe E est muni d'une forme sesquilinéaire hermitienne définie positive notée $(x \mid y)$, on peut définir une norme par

$$\| x \| = (x \mid x)^{\frac{1}{2}}.$$

Un espace complet pour une telle norme est dit espace de Hilbert complexe. Deux éléments x, y de E tels que $(x \mid y) = 0$ sont dits orthogonaux. Si F est un sous-espace vectoriel de E, on appelle orthogonal de F et on note $F^{\perp}$ le sous-espace formé des vecteurs orthogonaux à tous les éléments de F. Si F est un sous-espace fermé de E, on désigne par Π_F l'opérateur de projection orthogonale sur F qui à un élément x de E associe l'unique élément $\Pi_F(x)$ de F tel que :

$$x - \Pi_F(x) \in F^{\perp}.$$

A tout opérateur T d'un espace de Hilbert E, on peut associer un unique opérateur T^* tel que l'on ait :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad (T(x) \mid y) = (x \mid T^*(y)).$$

T^* est appelé adjoint de T.

1° Soit T un opérateur d'un espace de Hilbert complexe E; établir que

$$\| T \| = \sup_{\substack{\| x \| \leqslant 1 \\ \| y \| \leqslant 1}} | (T(x) \mid y) |.$$

En déduire que $\| T^* \| = \| T \|$.

Dans tout le reste de cette première partie, on suppose que T est un projecteur contractant.

2° Montrer que T^* est alors un projecteur contractant.

3° On note F l'image de T; montrer que F est un sous-espace fermé.

On note F^* l'image de T^*.

4° Montrer que le noyau de T est l'orthogonal de F^*.

5° Soit x un élément de E; établir que l'on a $x = T(x)$ si et seulement si $x = T^*(x)$.

6° Déduire de ce qui précède que T est la projection orthogonale sur F.

DEUXIÈME PARTIE

Si α est un nombre complexe non nul, on note sgn (α) le nombre $\frac{\alpha}{|\alpha|}$. On pose $\operatorname{sgn}(0) = 0$.

Si r est un nombre réel strictement positif et α un élément de $\mathbb{C}$, on pose

$$\alpha^{[r]} = \operatorname{sgn}(\alpha) . |\alpha|^r.$$

L'attention des candidats est attirée sur le caractère inhabituel de cette notation.

1° Soit u un nombre complexe, $u = a + ib$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$; donner un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 des fonctions d'une variable réelle k_1 et k_2 définies par :

$$k_1(x) = \operatorname{sgn}(1 + ux)$$
$$k_2(x) = | 1 + ux |.$$

2° Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs complexes. Soit r un élément non nul de $\mathbb{R}^+$; si x est élément de I, on écrit :

$$f^{[r]}(x) \quad \text{pour} \quad (f(x))^{[r]}.$$

On considère les deux suites de fonctions :

$$h_n(x) = n\left[(1 + n^{-1}f^{[r]}(x))^{\left[\frac{1}{r}\right]} - 1\right] \qquad n \geqslant 1$$

$$g_n(x) = n\left[(i + n^{-1}f^{[r]}(x))^{\left[\frac{1}{r}\right]} - i\right] \qquad n \geqslant 1.$$

Montrer que, pour tout $x \in$ I, $h_n(x) + g_n(x)$ a, quand n tend vers l'infini, une limite de la forme $\mathrm{K}f^{[r]}(x)$ où K est une constante (dépendant de r) qu'on déterminera.

Dans tout le reste de cette partie, on suppose qu'on a $0 < r < 1$; on pose $s = \dfrac{1-r}{r}$ et

$$\delta_n(x) = |1 + n^{-1}f^{[r]}(x)|^s.$$

3° Prouver l'égalité :

$$h_n(x) = f^{[r]}(x) \,.\, \delta_n(x) + n(\delta_n(x) - 1)$$

4° Prouver que les fonctions :

$$\mathrm{H}_n(x) = \frac{f^{[r]}(x) \,.\, \delta_n(x)}{1 + |f(x)|}$$

sont majorées en module par un nombre M indépendant de n et de x.

5° Prouver de même que les fonctions

$$\mathrm{H}'_n(x) = \frac{n(\delta_n(x) - 1)}{1 + |f(x)|}$$

sont majorées en module par un nombre M′ indépendant de n et de x. (On pourra utiliser le théorème des accroissements finis.)

6° Prouver l'existence d'un nombre réel A tel qu'on ait pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour tout élément x de I :

$$|h_n(x) + g_n(x)| \leqslant \mathrm{A}(1 + |f(x)|).$$

TROISIÈME PARTIE

On munit le segment fermé $[0, 1]$ de la mesure de Lebesgue μ. Deux fonctions mesurables définies sur $[0, 1]$ qui ne diffèrent que sur un ensemble de mesure nulle sont dites presque partout égales. La relation d'égalité presque partout est une relation d'équivalence et les classes sont appelées classes de fonctions mesurables.

Si f est une fonction mesurable définie sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, on note

$$\int^{\cdot} f\,d\mu$$

l'intégrale de f pour la mesure μ (cette intégrale étant éventuellement infinie).

La notation

$$\int^{\cdot} f\,d\mu$$

s'étend aux fonctions f à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui sont telles que :

$$\int^{\cdot} |f|\,d\mu < \infty.$$

On rappelle que si s est un nombre réel, $s \geqslant 1$, on note L^s l'espace des classes τ de fonctions complexes mesurables définies sur $[0\,,\,1]$ et telles que pour toute fonction f de la classe τ, on ait :

$$\int |f|^s \, d\mu < \infty .$$

Comme c'est l'usage, on se permettra dans toute la suite de noter par une même lettre une classe de fonctions et un représentant quelconque de cette classe; c'est ainsi qu'on définit simplement la norme d'un élément f de L^s :

$$\|f\|_s = \left(\int |f|^s \, d\mu\right)^{\frac{1}{s}} .$$

On rappelle que, muni de cette norme, L^s est un espace de Banach. De plus, pour $s = 2$, la norme provient d'une forme sesquilinéaire hermitienne

$$(f \mid g) = \int f \cdot \overline{g} \, d\mu .$$

Si f, g sont des éléments de L^s, on écrit :

$$f \geqslant g \qquad \text{p.p.}$$

pour exprimer que le nombre $f(x) - g(x)$ appartient à $\mathbb{R}^+$ hors d'un ensemble de mesure nulle. On omet quelquefois la précision p.p.

Dans tout ce qui suit, p est un nombre réel, $p > 1$ et q est le nombre défini par

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 ; \text{ on pose } r = p - 1.$$

On rappelle que si f est un élément de L^p, $f \geqslant 0$ p.p., et g un élément de L^q, $g \geqslant 0$ p.p., on a

$$\int f \cdot g \, d\mu \leqslant \left(\int f^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int g^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} .$$

De plus, l'inégalité est stricte sauf si existent deux nombres réels non simultanément nuls a, b tels que :

$$a f^p = b g^q \qquad \text{p.p.}$$

auquel cas c'est une égalité.

Les trois questions suivantes sont indépendantes les unes des autres.

1° Soit f un élément de L^p et g un élément de L^q ; établir l'inégalité

$$\left|\int f \cdot \overline{g} \, d\mu\right| \leqslant \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} .$$

Montrer que l'inégalité est stricte sauf dans le cas où existent deux nombres complexes α, β non simultanément nuls, tels que

$$\alpha f^{[r]} = \beta g^{[q]} \qquad \text{p.p.}$$

2° Soit f un élément de L^p; montrer que $f^{[r]}$ appartient à L^q.

3° Soient s, s' des nombres réels, $1 \leqslant s \leqslant s'$, f une fonction de $L^{s'}$; établir l'inégalité

$$\left(\int |f|^s \, d\mu\right)^{\frac{1}{s}} \leqslant \left(\int |f|^{s'} \, d\mu\right)^{\frac{1}{s'}} .$$

En déduire que $L^{s'}$ est un sous-espace de L^s. Quelle est l'adhérence de $L^{s'}$ dans L^s pour la topologie définie par la norme de L^s ?

QUATRIÈME PARTIE

Dans cette partie, on fixe une famille $\mathcal{N}$ de sous-ensembles mesurables de $[0\,,\,1]$; on suppose $\mathcal{N}$ stable par intersection finie et complémentation. A tout ensemble mesurable A est associée sa fonction caractéristique χ_A définie par

$$\chi_A(x) = 1 \qquad \text{si } x \in A$$
$$\chi_A(x) = 0 \qquad \text{sinon.}$$

On note X le C-espace vectoriel des combinaisons linéaires de classes de fonctions de la forme χ_A, $A \in \mathfrak{M}$; X est un sous-espace de L^1 et aussi de tout espace L^p, $p > 1$; on désigne par $\overline{X}$ l'adhérence de X dans L^2.

Soit u un élément de $\overline{X}$; on admettra qu'il existe une suite (u_n) d'éléments de X et une fonction v de L^2 tels que :

i. $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = u$ p.p.

ii. $|u_n| \leqslant v$ p.p.

On suppose dans cette partie que p est strictement compris entre 1 et 2; on rappelle que q et r sont tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $r = p - 1$. Soit f un élément de L^2; on pose $u = \Pi_X(f)$ où Π_X est la projection orthogonale sur $\overline{X}$. On choisit une suite (u_n) et un élément v de L^2 qui satisfont les conditions i. et ii. ci-dessus et on pose :

$$\alpha_n = \int u \, \overline{u_n^{[r]}} \, d\mu .$$

1° *a.* Établir l'inégalité :

$$|\alpha_n| \leqslant \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |u_n|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

(On pourra commencer par établir que $u_n^{[r]} \in X$).

b. En déduire qu'on a :

$$\left(\int |u|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

(On justifiera soigneusement tout passage à la limite).

c. Prouver qu'on a, de même :

$$\int |u| \, d\mu \leqslant \int |f| \, d\mu .$$

2° Déduire de ce qui précède que Π_X se prolonge en un projecteur contractant Π_X^p de L^p, et, de même, que Π_X se prolonge en un projecteur contractant Π_X^1 de L^1.

CINQUIÈME PARTIE

On admet le résultat suivant :

A tout opérateur T de L^p $(p > 1)$ on peut associer un unique opérateur T^* de L^q $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ tel que pour tout élément f de L^p et tout élément g de L^q, on ait

$$\int T(f) \, \overline{g} \, d\mu = \int f \, \overline{T^*(g)} \, d\mu .$$

De plus, les opérateurs T et T^* ont même norme.

On suppose dans toute cette partie que T est un projecteur contractant de L^p $(p > 1)$.

1° Montrer que T^* est un projecteur contractant de L^q.

2° Soit f un élément de L^p ; montrer que si

$$T(f) = f \quad \text{p.p.} \quad \text{alors}$$
$$T^*(f^{[r]}) = f^{[r]} \quad \text{p.p.} \quad (r = p - 1).$$

On suppose désormais que p est strictement compris entre 1 et 2 et que T est un projecteur contractant de L^p tel que $T(1) = 1$ (où 1 désigne la fonction caractéristique $\chi_{[0,1]}$).

3° Soit f un élément de L^p tel que $T(f) = f$ p.p.

a. Déduire de ce qui précède que les fonctions h_n et g_n définies comme dans la deuxième partie appartiennent à l'image de T.

b. Montrer que $f^{[r]}$ est dans l'image de T; plus généralement, montrer que, pour tout entier n, $f^{[r^n]}$ est dans l'image de T.

4° Soit g un élément de L^p, f son image par T; prouver qu'on a :

$$\int |f|\, d\mu \leqslant \int |g|\, d\mu.$$

SIXIÈME PARTIE

Cette partie est consacrée aux projecteurs contractants T de L^1 qui sont tels que $T(1) = 1$.

1° Soit A un sous-ensemble mesurable de $[0, 1]$ et B son complémentaire dans $[0, 1]$; montrer qu'on a :

$$|T(\chi_A) + T(\chi_B)| = |T(\chi_A)| + |T(\chi_B)| \quad \text{p.p.}$$

2° En déduire que si $f = \chi_A$, on a

$$(1) \qquad T(f) \geqslant 0$$

$$(2) \qquad \int T(f)\, d\mu = \int f\, d\mu.$$

Montrer que les relations (1) et (2) s'étendent à tout élément f de L^1 qui est tel que $f \geqslant 0$ p.p.

3° On note $\mathfrak{N}_T$, la famille des sous-ensembles mesurables A de $[0, 1]$ tels que

$$T(\chi_A) = \chi_A \quad \text{p.p.}$$

Prouver que $\mathfrak{N}_T$ est stable par intersection finie et complémentation.

4° Soit A un élément de $\mathfrak{N}_T$, B son complémentaire; montrer que pour tout élément f de L^1 tel que $f \geqslant 0$ p.p., on a :

$$\int T(f.\chi_A).\chi_B\, d\mu = 0.$$

En déduire que :

$$\int f \chi_A\, d\mu = \int T(f) \chi_A\, d\mu.$$

Étendre ce résultat au cas où f est un élément quelconque de L^1.

5° Afin d'utiliser sans changement de notation les définitions de la quatrième partie, on désigne par X le sous-espace vectoriel engendré par les classes de fonctions χ_A, $A \in \mathfrak{N}_T$ et par $\overline{X}$ son adhérence dans L^2. Si f est élément de L^1, on pose :

$$\operatorname{Re}(f) = \frac{f + \overline{f}}{2} \quad \text{et}$$

$$f^+ = \sup(0, \operatorname{Re}(f)).$$

Soit Y l'image de T; montrer que si f appartient à Y, il en est de même de f^+.

Montrer que si f appartient à Y, alors, pour tout nombre réel c, l'ensemble

$$\{ x : f^{+}(x) > c \}$$

appartient à $\mathcal{N}_T$. En déduire que Y est l'adhérence de X dans L^1.

6° Soit f une fonction de L^1 bornée (en module); prouver que pour tout élément g de Y, on a :

$$\int f \bar{g} \, d\mu = \int T(f) \, \bar{g} \, d\mu.$$

Établir que l'image par T d'une fonction de L^2 est dans L^2.

7° Prouver que T est l'opérateur Π_X^1 défini comme dans la quatrième partie.

8° On suppose pour cette question que T est un projecteur contractant de L^p $(1 < p < 2)$ tel que $T(1) = 1$. On définit $\mathcal{N}_T$ et X comme plus haut. Établir que T est l'opérateur Π_X^p défini comme dans la quatrième partie.

3° On note $\mathcal{N}_T$, la famille des sous-ensembles mesurables A de $[0, 1]$ tels que

$$T(\chi_A) = \chi_A \quad \text{p.p.}$$

Prouver que $\mathcal{N}_T$ est stable par intersection finie et complémentation.

4° Soit A un élément de $\mathcal{N}_T$, B son complémentaire; montrer que pour tout élément f de L^1 tel que $f \geqslant 0$ p.p., on a :

$$\int T(f . \chi_A) . \chi_B \, d\mu = 0.$$

En déduire que :

$$\int f \chi_A \, d\mu = \int T(f) \, \chi_A \, d\mu.$$

Étendre ce résultat au cas où f est un élément quelconque de L^1.

5° Afin d'utiliser sans changement de notation les définitions de la quatrième partie, on désigne par X le sous-espace vectoriel engendré par les classes de fonctions χ_A, $A \in \mathcal{N}_T$ et par $\bar{X}$ son adhérence dans L^2. Si f est élément de L^1, on pose :

$$\mathrm{Re}(f) = \frac{f + \bar{f}}{2} \quad \text{et}$$

$$f^{+} = \sup(0, \mathrm{Re}(f)).$$

Soit Y l'image de T; montrer que si f appartient à Y, il en est de même de f^{+}.

Montrer que si f appartient à Y, alors, pour tout nombre réel c, l'ensemble

$$\{ x : f^{+}(x) > c \}$$

appartient à $\mathcal{N}_T$. En déduire que Y est l'adhérence de X dans L^1.

6° Soit f une fonction de L^1 bornée (en module); prouver que pour tout élément g de Y, on a :

$$\int f \bar{g} \, d\mu = \int T(f) \, \bar{g} \, d\mu.$$

Établir que l'image par T d'une fonction de L^2 est dans L^2.

7° Prouver que T est l'opérateur Π_X^1 défini comme dans la quatrième partie.

8° On suppose pour cette question que T est un projecteur contractant de L^p $(1 < p < 2)$ tel que $T(1) = 1$. On définit $\mathcal{N}_T$ et X comme plus haut. Établir que T est l'opérateur Π_X^p défini comme dans la quatrième partie.